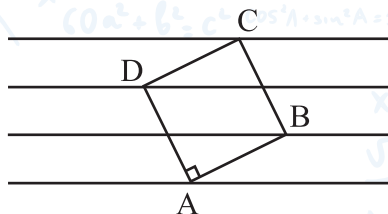


چالش مربع و خطهای موازی

فاطمه معین الدینی
 جلال سرحدی
 حسین کریمی

علی و رضا پسر عمو و یوسف و ناصر پسر خاله یکدیگرند. از طرفی هستی خواهر علی، فاطمه خواهر ناصر و جلال برادر رضا است. آن‌ها حل‌هایشان را برای یک مسئله خدمت معلمشان بردند. آقا معلم با دیدن حل‌ها و اینکه هستی، فاطمه و جلال هم در حل آن مسائل مشارکت کرده بودند، خیلی خوش حال شد. گفت: «حالا که شما این قدر مشتاق هستید، به این دو مسئله هم فکر کنید:

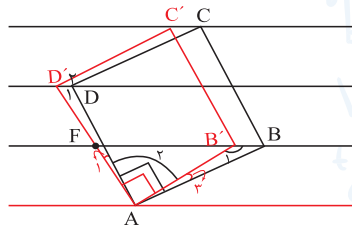
۱. اگر نقطه A روی یکی از آن خطهای موازی، ثابت باشد، آیا مربع ABCD منحصربه‌فرد (یکتا) است؟



شکل ۱

۲. چگونه می‌توانیم روی زمین چهار نقطه A', B', C', D' را تعیین کنیم که با رسم عمودهایی از آن نقطه‌ها بر خط‌ها (سیم‌ها)، به چهار رأس مربعی مانند ABCD برسیم؟

۲. چگونه می‌توانیم روی زمین چهار نقطه A', B', C', D' را تعیین کنیم که با رسم عمودهایی از آن نقطه‌ها بر خط‌ها (سیم‌ها)، به چهار رأس مربعی مانند ABCD برسیم؟



شکل ۲

در این صورت داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_r = (90^\circ - \hat{A}_r) \\ AB' &= AD' \\ AB &= AD \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABB' \cong \triangle ADD' \Rightarrow \hat{B}'_1 = \hat{D}'_1 \quad *$$

اما می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه AFB', زاویه \hat{B}'_1 زاویه خارجی است و بزرگ‌تر از زاویه FAB'؛ یعنی: $\hat{B}'_1 > 90^\circ$. از طرف دیگر، \hat{D}'_1 متمم \hat{D}'_r است، یعنی: $\hat{D}'_1 < 90^\circ$. این نشان می‌دهد که تساوی * برقرار نیست. لذا مربعی غیر از

۲. چگونه می‌توانیم روی زمین چهار نقطه A', B', C', D' را تعیین کنیم که با رسم عمودهایی از آن نقطه‌ها بر خط‌ها (سیم‌ها)، به چهار رأس مربعی مانند ABCD برسیم؟

سکوتی سنگین بین بچه‌ها حاکم بود. علی گفت: «دارید روی سؤال‌های آقا معلم فکر می‌کنید؟»

یوسف گفت: «نه، مادر بزرگم در بیمارستان شهر بستری است و ما با ناصر این‌ها باید امروز برویم شهر. کمی هم حسودی‌ام می‌شود که شما می‌توانید روی سؤال‌ها فکر کنید، اما ما نمی‌توانیم.»

رضا گفت: «اولاً بیخودی داری حسودی می‌کنی. چون حل مسئله‌ها مربوط به همه ماست. تو شروع کردی و ایده خوب را تو دادی و ما هم داریم یاد می‌گیریم. از طرف دیگر، ما هم بدون کمک جلال و هستی نمی‌توانستیم به جواب برسیم. ما بچه‌محل هستیم و دوست همدیگه، پس یکی هستیم. امشب هم خانه عمو دعوت هستیم و من و علی می‌توانیم به کمک هستی و جلال مسئله‌ها را حل کنیم. به آقا معلم هم می‌گوییم، همگی با هم به جواب رسیدیم.»

بعد از ظهر همان روز، رضا و جلال زودتر رفتند خانه عمویشان تا بتوانند قبل از جمع شدن همه، وقت داشته باشند با علی و هستی روی مسئله‌ها فکر کنند. ابتدا مسئله اول را خواندند:

اگر نقطه A روی یکی از آن خطهای موازی، ثابت باشد، آیا مربع

بچه‌ها سراغ خواندن صورت مسئله دوم رفتند که از این قرار بود: «چگونه می‌توانیم روی زمین چهار نقطه A' ، B' ، C' و D' را تعیین کنیم که با رسم عمودهایی از آن نقطه‌ها بر خطها (سیم‌ها)، به چهار رأس مربعی مانند ABCD برسیم؟» (شکل ۷)

همین که بچه‌ها خواستند روی حل مسئله فکر کنند، مادر علی با دو بشقاب وارد اتاق شد. در یکی نان و پنیر، و دیگری پر از کشمش و نخودچی بود. مادر به هستی گفت: «فاطمه پای تلفن است و می‌خواهد با تو صحبت کند.»

بچه‌ها کمی نگران شدند:

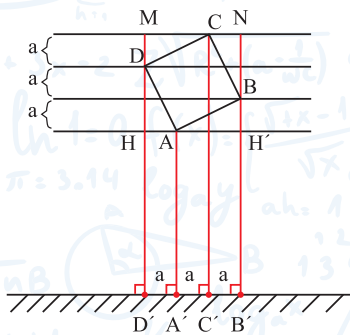
نکنه حال مادر بزرگ یوسف و ناصر بدتر شده باشد!
 چند لحظه بعد، هستی پیش بچه‌ها برگشت و گفت: «الان فاطمه گفت که به شما هم بگویم: حال مادر بزرگشان بهتر شده و از بیمارستان مرخص شده است. قرار است آن‌ها هم چند روز در شهر بمانند. تا کمک مادر بزرگشان باشند.»

همین خبر خوب باعث آرامش بیشتر بچه‌ها شد.

رضا گفت: «با توجه به هم‌نهستی چهار مثلث قائم‌الزاویه، CMD ، $AH'B$ و BNC و DHA ، می‌توانیم بگوییم: $D'B' = MN = 2a$ ، علی هم گفت: «پس با توجه به اینکه: $HA = CN = a$ ، داریم: $D'A' = C'B' = a$ »

جلال ادامه داد: «با توجه به اینکه: $D'B' = 2a$ و $D'A' = C'B' = a$ ، می‌توان نتیجه گرفت که: $A'C' = a$. پس اگر روی زمین چهار نقطه را متوالیا به فاصله a (همان فاصله بین دو خط موازی متوالی) در نظر بگیریم، با رسم عمودهایی از آن نقطه‌ها به سیم‌ها، چهار رأس مربع مورد نظر به دست می‌آید.»

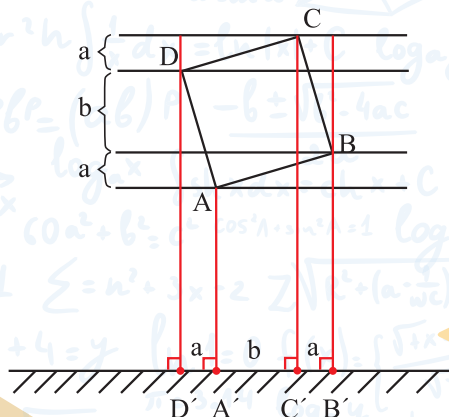
شکل ۷



علی گفت: «باز هم که فاصله‌ها را یکسان گرفتید! اگر فاصله خط‌های وسطی با فاصله دو خط کناری متفاوت باشد، چه کنیم؟»

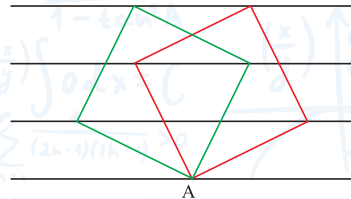
هستی گفت: «این هم که مشکلی ندارد. مطابق شکل ۸ عمل می‌کنیم.»

تمرین: روش حل هستی را توضیح دهید.



شکل ۸

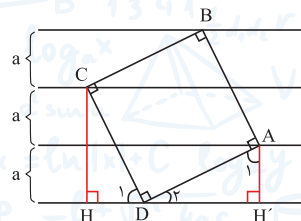
ABCD نخواهیم داشت.» هستی همچنین اضافه کرد: «دو مربع در شکل ۳ قابل انطباق بر یکدیگرند و دو مربع مجزا محسوب نمی‌شوند.»



شکل ۳

جلال گفت: «حالا اگر A روی یکی از دو خط وسطی باشد، در آن صورت داریم: $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ (چون هر دو متمم \hat{D}_1 هستند) و $AD=DC$ (دو ضلع مربع). (شکل ۴)

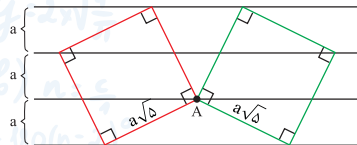
پس دو مثلث قائم‌الزاویه ADH' و CHD به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم هم‌نهشت‌اند که داریم:



شکل ۴

$$\left. \begin{array}{l} DH = AH' = a \\ DH' = CH = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow AD = DC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a = a\sqrt{5}$$

حال اگر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $a\sqrt{5}$ رسم کنیم، خط پایین را در دو نقطه قطع می‌کند (شکل ۵). ولی به دلیل آنکه هر دو مربع با هم برابرند، یکی محسوب می‌شود و مربع ABCD منحصر به فرد است.»

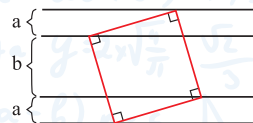


شکل ۵

علی گفت: «هر دوی شما حالتی را در نظر گرفتید که فاصله هر دو خط موازی متوالی ثابت باشد. حالا اگر فاصله دو خط اولی با فاصله دو خط آخری یکسان، ولی متفاوت با فاصله دو خط وسطی باشد، آیا باز هم مربع منحصر به فرد است؟» (شکل ۶)

رضا گفت: «آره مشکلی نیست، چون با توجه به شکل ۶، اندازه ضلع مربع برابر است با: $\sqrt{a^2 + (a+b)^2}$ »

پس رأس A چه روی خط کناری باشد، چه روی یکی از خط‌های وسطی، کافی است دایره‌ای به آن مرکز و به شعاع $\sqrt{a^2 + (a+b)^2}$ رسم کنیم. در این صورت باز هم به مربع منحصر به فردی می‌رسیم.»



شکل ۶